Existence d'orbites brake par le théorème de Noether

Henri Drouhin

24 août 2025

Table des matières

Le problème **1**

1 Dynamique langrangienne **4**

2 Début de la preuve : circulation de la vitesse **10**

3 Fin de la peuve : lacet des apogées **16**

Généralisations éventuelles **28**

Le problème

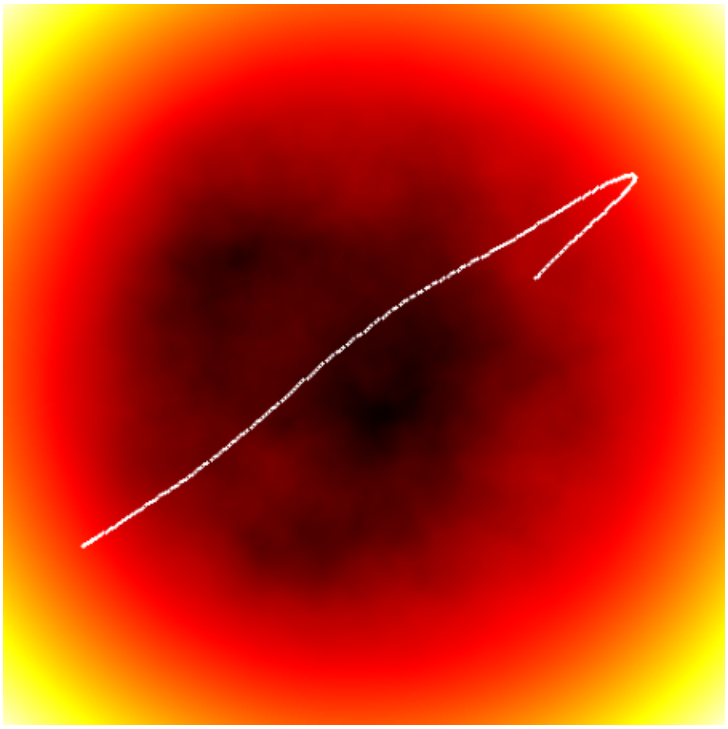
Prenez un saladier dans votre cuisine, parfaitement symétrique. Donnez un coup de votre baguette magique habituelle pour supprimer les frottements, puis lâchez une bille sans vitesse initiale au bord du saladier.

Votre bille va accélérer, passer exactement au centre de votre saladier et remonter en face jusqu'à atteindre un point à la même hauteur que son point de départ. Ensuite, elle va rebrousser le chemin qu'elle vient d'emprunter jusqu'à son point de départ et s'arrêter à nouveau. Dès lors, elle va répéter ces allers-retours, indéfiniment.

Un tel mouvement périodique, qui contient deux instants distincts d'annulation de la vitesse est appelé "orbite brake". Il est intéressant de remarquer que - même dans le cas général d'une particule qui évolue dans un potentiel quelconque - la périodicité est une conséquence des deux instants distincts d'annulation, car dès qu'une particule s'arrête, elle va forcément rebrousser chemin, par unicité de la solution aux équations du mouvement à position et vitesse fixée.

Ainsi dans le cas de votre bol parfaitement symétrique - j'entends par là invariant par rotation - toutes les positions de départ conduisent à des orbites brake lorsqu'on y lâche une bille sans vitesse initiale. Mais quand j'ai essayé de refaire cette expérience chez moi, j'ai eu un souci : comme on a fêté les 60 ans de mariage de Maurice et Micheline la semaine dernière, on a accroché nos casseroles et nos saladiers à l'arrière de leur voiture, et maintenant tous sont cabossés ! Il n'y a plus un seul récipient invariant par rotation à la maison...

Désormais quand je lâche une bille au bord d'un de mes saladiers - toujours après un coup de baguette magique pour faire disparaître les frottements bien entendu - elle commence à accélérer vers le centre, mais comme le bol est cabossé, elle l'évite de peu, commence sa montée un peu en biais, puis ne s'immobilise pas parfaitement en haut de sa montée. En effet, à cause de toutes les perturbations qu'elle a subies, lorsqu'elle approche le sommet de sa trajectoire, sa vitesse n'est plus parfaitement alignée sur le gradient du potentiel (la pente maximale), et elle va donc franchir ce sommet en se déplaçant horizontalement, comme sur le schéma suivant.



Voici une simulation informatique de la situation.
L'échelle de couleur représente l'altitude : plus un point est noir, plus il est bas,
et plus il est rouge voire jaune, plus il est haut.
La ligne blanche est la trajectoire d'une bille, lâchée sans vitesse en bas à gauche de l'image (mais en haut du bol). On observe effectivement qu'au sommet de sa trajectoire sa vitesse n'est pas nulle.

Ainsi, comme sa vitesse ne s'est pas annulée, elle redescend par un chemin différent de celui qu'elle a pris pour monter. Sa trajectoire va continuer à être modifiée, jusqu'à ce que son mouvement n'ait plus rien à voir avec celui d'une bille dans le bol parfaitement symétrique. Il n'y a dès lors plus aucune raison de penser que son mouvement deviendra périodique...

Du moins, c'est ce que j'ai toujours obtenu en positionnant ma bille au hasard. Cependant, est-ce que je pourrais, étant donné un bol cabossé, astucieusement choisir mon point de départ pour faire en sorte que ma bille suive une orbite brake ?

Comme la tradition d'accrocher des ustensiles métalliques derrière sa voiture pour fêter un évènement n'est pas récente, c'est sans surprise qu'on s'apercevra que cette question a déjà été traitée. Herbert Seifert a en effet répondu par l'affirmative dans un cadre très général en 1948 [1]. L'essentiel de mon stage a consisté à essayer de redémontrer - au moins partiellement - ce résultat sans lire l'article de Seifert.

J'exposerai le résultat de mon travail en trois parties. Tout d'abord j'introduirai les notions qui m'ont été utiles, à savoir le formalisme lagrangien de la mécanique et le théorème de Noether, que j'illustrerai en démontrant que tout se passe comme je l'ai décrit ci-dessus dans le cas du bol symétrique. Dans un deuxième temps, je décrirai ma preuve et son argument principal, qui consiste à appliquer le théorème de Noether à une symétrie cachée du saladier cabossé. Enfin, je terminerai ma preuve en me confrontant aux difficultés analytiques qui seront apparues dans la deuxième partie.

1. [1] Seifert, H. Periodische Bewegungen mechanischer Systeme. Math Z 51, 197–216

Remerciements

J'adresse tout d'abord mes remerciements à Ezequiel Maderna, pour son accueil, ses conseils et ses retours tout au long du stage. Je remercie également Andrea Venturelli pour ses explications sur les orbites-brake dans le cas du problème des trois corps, et tous les membres de la fing que j'ai pu rencontrer durant mon stage pour les échanges que nous avons eu.

Enfin je remercie le Laboratorio Del Plata, le Centre Henri Lebesgue et l'Ecole Normale supérieure de Rennes pour leur aide financière.

1 Dynamique langrangienne

Généralités

Tout au long des XVIIIe et XIXe siècles, de nombreux physiciens et mathématiciens (Maupertuis, Euler, Lagrange, Hamilton, Jacobi...) ont entrepris de reformuler les lois de la dynamique énoncées par Newton. On a pris l'habitude de désigner le fruit de leur travail par le terme "mécanique analytique".

Prenons l'exemple d'une particule qui se déplace dans un potentiel à deux dimensions. En mécanique analytique, on préfère étudier cette trajectoire dans un espace de dimension deux fois plus grande, qu'on appelle espace des phases. Cet espace est le produit de l'espace des positions, à deux dimensions, par l'espace des vitesses. Si notre problème physique contient de nombreuses particules, on peut encore augmenter la dimension de l'espace des phases pour qu'un point de l'espace des phases représente la description complète d'une configuration de l'espace classique, à savoir la position et la vitesse de chaque particule.

Ensuite, dans le formalisme newtonien, on explique le mouvement des particules par des "forces" auxquelles nos particules sont soumises. En mécanique analytique, on remplace ces forces par des principes variationnels, comme le principe de moindre action. Les particules ne subissent plus de forces, mais elles "choisissent" le chemin qui va minimiser une certaine quantité.

Ces deux formulations, bien qu'en apparence très différentes, font exactement les mêmes prédictions sur les mouvements des particules. Cependant, dans certaines situations physiques, il est plus aisé d'employer le formalisme de la mécanique analytique que les lois de Newton.

Le formalisme de la mécanique analytique est par exemple plus adapté à l'étude des symétries des problèmes de dynamique : on peut tout particulièrement penser au théorème de Noether. Celui-ci va s'avérer très utile pour aborder notre problème.

Action lagrangienne

Définition 1.1. Le Lagrangien associé à un problème de dynamique est une fonction qui part de l'espace des phases E - espace des positions et des vitesses - et qui arrive dans $\mathbb{R}$. Il est défini comme la différence de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle :

$$\mathcal{L} = E_c - E_p$$

Exemple 1.1. *Si on s'intéresse à une bille qui se déplace dans un potentiel $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bidimensionnel, on peut décrire la situation par le lagrangien :*

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \ & \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \\ & (x, v) \mapsto \frac{1}{2} m v^2 - V(x) \end{aligned}$$

Ici le carré sur la variable v correspond au produit scalaire de v par v, car x et v sont deux éléments de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 1.2. *Voici un cas particulier qui nous intéresse particulièrement : le lagrangien associé à une bille se déplaçant dans un bol. On modélisera notre bol par un potentiel harmonique :*

$$\begin{aligned} V : \ & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \frac{1}{2} x^2 \end{aligned}$$

Le carré est encore un carré scalaire. Comme l'influence de la masse de la bille ne nous intéresse pas, on peut la supposer égale à 1*, ce qui nous donne le lagrangien :*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}: \ & \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \\ & (x,v) \mapsto \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}x^2\end{aligned}$$

Pour le bol cabossé, on ajoutera une perturbation δ *au potentiel, ce qui nous donne le lagrangien :*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}: \ & \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \\ & (x,v) \mapsto \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}x^2 - \delta(x)\end{aligned}$$

Pour l'instant on suppose seulement que δ *est une fonction lisse, mais au fur et à mesure, nous rajouterons des hypothèses sur cette perturbation (notamment des bornes sur ses dérivées).*

Remarque. Dans les deux exemples ci-dessus, l'espace des phases était de dimension 4 car nous nous intéressions au mouvement d'une particule en deux dimension. Mais il peut être de dimension plus grande : il serait de dimension 6 si on étudiait une particule qui se déplace dans un espace à trois dimensions, de dimension $6N$ si on étudiait le mouvement de N particules, de dimension infinie si on étudiait un milieu continu... En tout cas - du moins dans ce rapport de stage - il se décompose toujours en deux sous-espaces de même dimension, l'espace des positions E_{pos} et l'espace des vitesses E_{vit}

Définition 1.2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, Soit $x \in C^\infty(I, E_{pos})$.
On appelle action du mouvement x la quantité :

$$\mathcal{S}(x) = \int_I \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t))dt$$

A présent, nous pouvons formuler le principe de moindre action. Maupertuis l'énonçait ainsi en 1744 :

« Lorsqu'il arrive quelque changement dans la nature, la quantité d'action, nécessaire pour ce changement, est la plus petite qui soit possible. »

Pour les besoins de notre étude, on préférera une formulation plus moderne :
Si $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, si $x_1, x_2 \in E_{pos}$, parmi toutes les trajectoires imaginables $x \in C^\infty([t_1,t_2], E_{pos})$ avec $x(t_1) = x_1$ et $x(t_2) = x_2$, celles qui peuvent être observées naturellement sont les points critiques de l'action :

$$d\mathcal{S}_x = 0$$

Ce principe de moindre action, ou principe de Maupertuis, ne requiert pas de démonstration : ce n'est pas un théorème mais un principe physique, qui essaie de décrire et prédire le comportement des objets qui nous entourent. En revanche on peut démontrer, comme annoncé, que ce principe physique est équivalent à la 2e loi de Newton.

Théorème 1.1. *Soit* $x \in C^\infty([t_1,t_2], E_{pos})$ *avec* $x(t_1) = x_1$ *et* $x(t_2) = x_2$.

x *vérifie le principe de Maupertuis :*

$$d\mathcal{S}_x = 0$$

ssi

x *vérifie l'équation d'Euler-Lagrange :*

$$\forall t \in [t_1,t_2], \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}_{(x(t),\dot{x}(t))}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}_{(x(t),\dot{x}(t))}$$

Démonstration. Soit $x \in C^\infty([t_1,t_2],E_{pos})$ avec $x(t_1)=x_1$ et $x(t_2)=x_2$
Soit $h \in C^\infty([t_1,t_2],E_{pos})$ avec $x(t_1)=0$ et $x(t_2)=0$

$$\begin{aligned}
d\mathcal{S}_x(h) &= \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}_{(x(t),\dot{x}(t))}(h(t)) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v}_{(x(t),\dot{x}(t))}(\dot{h}(t))\right]dt && \textit{(règle de la chaîne, convergence dominée)}\\
&= \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}_{(x(t),\dot{x}(t))}(h(t))dt + \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v}_{(x(t),\dot{x}(t))}(\dot{h}(t))dt\\
&= \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}_{(x(t),\dot{x}(t))}(h(t))dt - \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v}_{(x(t),\dot{x}(t))}\right](h(t))dt && \textit{(intégration par parties)}\\
&= \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}_{(x(t),\dot{x}(t))} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v}_{(x(t),\dot{x}(t))}\right)\right](h(t))dt
\end{aligned}$$

On vient de montrer :

$$d\mathcal{S}_x = 0$$

$$ssi$$

$$\forall h \in C^\infty([t_1,t_2],E_{pos}) \text{ avec } x(t_1)=0 \text{ et } x(t_2)=0,$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}_{(x(t),\dot{x}(t))} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v}_{(x(t),\dot{x}(t))}\right)\right](h(t))dt = 0$$

On conclut en choisissant pour h des approximations de l'unité. □

Vérifions que l'équation d'Euler-Lagrange redonne bien l'équation de Newton dans le cas d'une particule qui évolue dans un potentiel.

Théorème 1.2. *On suppose que le lagrangien $\mathcal{L}$ est de la forme :*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}:\ \mathbb{R}^{2n} &\to \mathbb{R}\\
(x,v) &\mapsto \frac{1}{2}mv^2 - V(x)
\end{aligned}$$

Soit $x \in C^\infty([t_1,t_2],E_{pos})$ avec $x(t_1)=x_1$ et $x(t_2)=x_2$.

x vérifie le principe de Maupertuis :

$$d\mathcal{S}_x = 0$$

$$ssi$$

x vérifie l'équation de Newton :

$$m\ddot{x}(t) = -(grad\ V)(x(t))$$

Démonstration. Pour ce type particulier de lagrangien évaluons les différents termes de l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v}_{(x(t),\dot{x}(t))} = \langle m\dot{x}(t),\ \cdot\ \rangle$$

Donc

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v}_{(x(t),\dot{x}(t))}\right] = \langle m\ddot{x}(t),\ \cdot\ \rangle$$

Par ailleurs on a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}_{(x(t),\dot{x}(t))} = -dV_{x(t)}$$

Donc l'équation d'Euler-Lagrange se réécrit sous la forme :

$$\langle m\ddot{x}(t),\ \cdot\ \rangle = -dV_{x(t)}$$

Ce qui, d'après le théorème de représentation de Riesz, équivaut à :

$$m\ddot{x}(t) = -(grad\ V)(x(t))$$

□

Remarque. On vient de réussir, pour une classe particulière de lagrangiens (ceux associés à une particule évoluant dans un potentiel), à mettre l'équation d'Euler-Lagrange sous forme résolue.
Cette forme particulière nous permet d'appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz - on rappelle qu'on a supposé que V était lisse - et donc de parler de flot lagrangien : $\varphi^{(t)} : E_{pos} \times E_{vit} \to E_{pos} \times E_{vit}$ est l'application qui à un point (x_0, v_0) de l'espace des phases associe $(x(t), \dot{x}(t))$ où x est l'unique solution de l'équation d'Euler-Lagrange avec $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$. Ce flot représente l'évolution physique d'une configuration quelconque. La théorie des EDO nous assure que ce flot est un C^∞ difféomorphisme.
Il faut être attentif au fait que tous les lagrangiens ne permettent pas de définir un flot. Un contre-exemple extrême est le lagrangien nul : si $\mathcal{L} = 0$, toutes les trajectoires vérifient Euler-Lagrange, il n'y a pas unicité de la solution. Cependant, on peut définir un flot dans un contexte plus général que celui que nous venons de voir, comme exposé dans les premiers chapitres de ce livre d'Albert Fathi [2]. En général, quand un lagrangien est directement issu d'un problème de physique, on n'a pas de problème de non unicité du flot.
Les résultats du paragraphe suivant seront uniquement valables pour les lagrangiens qui définissent un flot.

Théorème de Noether

Dans le paragraphe précédent, nous avons découvert le lagrangien et le principe de moindre action. Puis nous avons démontré qu'il était équivalent à l'équation de Newton.
A présent, nous allons récolter les fruits de ce travail préliminaire en découvrant le théorème de Noether. Ce théorème associe à chaque symétrie du lagrangien une grandeur conservée lors du mouvement. Donnons du sens à ceci :

Commençons par définir précisément ce que nous entendons par grandeur conservée, ou "intégrale première du mouvement" :

Définition 1.3. Une intégrale première du mouvement est une fonction $f : E_{pos} \times E_{vit} \to \mathbb{R}$ invariante par le flot lagrangien, c'est-à-dire que pour tout $(x, v) \in E_{pos} \times E_{vit}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(x, v) = f(\varphi^{(t)}(x, v))$$

Maintenant, voyons ce que nous appelons "symétrie du lagrangien" :

2. [2] Fathi, A. Weak KAM theorem in lagrangian dynamics

Définition 1.4. On appelle groupe à un paramètre de symétries du lagrangien une famille $(\psi_s)_{s\in\mathbb{R}}$ de C^∞-difféomorphismes de l'espace des positions, tels que :

$$\psi_0 = id_{E_{pos}}$$

$$\forall r, s \in \mathbb{R},\ \psi_r \circ \psi_s = \psi_{r+s}$$

$$s, x \mapsto \psi_s(x) \in C^\infty(\mathbb{R} \times E_{pos}, E_{pos})$$

Pour tout $s \in \mathbb{R},\ x \in E_{pos},\ v \in E_{vit}$, on a

$$\mathcal{L}(x, v) = \mathcal{L}(\psi_s(x), d\psi_s(v))$$

On a désormais toutes les notions nécessaires pour énoncer le théorème de Noether :

Théorème 1.3. *Soit $(\psi_s)_{s\in\mathbb{R}}$ un groupe à un paramètre de symétries du lagrangien.*
Alors

$$f(x, v) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}_{(x,v)} \cdot \left[\frac{d}{ds}\psi_s(x)\right]_{s=0}$$

est une intégrale première du mouvement.

Démonstration. Notons, pour tout $x \in E_{pos}$:

$$W(x) \overset{(def)}{=} \left[\frac{d}{ds}\psi_s(x)\right]_{s=0}$$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x \in C^\infty(I, E_{pos})$ une solution des équations d'Euler-Lagrange.
Dérivons $t \mapsto f(x(t), \dot{x}(t))$ pour montrer que cette fonction est constante.
Soit $t \in I$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[f(x(t), \dot{x}(t))\right] &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}_{(x(t),\dot{x}(t))}\right) \cdot W(x(t)) \ + \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}_{(x(t),\dot{x}(t))} \cdot \frac{d}{dt}W(x(t)) && \textit{(dérivée d'un produit)} \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}_{(x(t),\dot{x}(t))} \cdot W(x) \ + \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}_{(x(t),\dot{x}(t))} \cdot dW_{x(t)}(\dot{x}(t)) && \textit{(règle de la chaîne)} \\
&= \left[\frac{d}{ds}\mathcal{L}(\psi_s(x), d(\psi_s)_{x(t)}(\dot{x}(t))\right]_{s=0} && \textit{(règle de la chaîne)} \\
&= 0 && \textit{(définition 1.4)}
\end{aligned}$$

□

Exemple 1.3. *On s'intéresse à nouveau à notre bol symétrique. On représente la situation par une particule qui se déplace dans un potentiel $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ invariant par rotation, c'est-à-dire pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:*

$$V \circ \begin{pmatrix} cos\ \theta & -sin\ \theta \\ sin\ \theta & cos\ \theta \end{pmatrix} = V$$

Dans ce cas, on peut vérifier que $\begin{pmatrix} cos\ \theta & -sin\ \theta \\ sin\ \theta & cos\ \theta \end{pmatrix}$ est un groupe à un paramètre de symétries pour le lagrangien :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} :\ & \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \\
& (x, v) \mapsto \frac{1}{2}v^2 - V(x)
\end{aligned}$$

On se retrouve donc dans une situation qui vérifie les hypothèses du théorème de Noether, qui nous donne par conséquent une intégrale première du mouvement, que nous noterons f :
Pour tout $(x, y, v_x, v_y) \in \mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}\right) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}_{(x,y,v_x v_y)} \cdot \left[\frac{d}{d\theta}\begin{pmatrix} cos\ \theta & -sin\ \theta \\ sin\ \theta & cos\ \theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]_{s=0} \\ &= \begin{pmatrix} v_x & v_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= xv_y - yv_x \end{aligned}$$

Cette intégrale première est particulièrement utile pour montrer que tous les points conduisent à une orbite brake.

Repassons en notation vectorielle :
$X \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ désigne la trajectoire d'une particule lâchée à vitesse nulle en un point $X_0 \in \mathbb{R}^2$.
Alors on a $f(X(0), \dot{X}(0)) = 0$.
Donc d'après le théorème de Noether, $\forall t \in \mathbb{R},\ f(X(t), \dot{X}(t)) = 0$.
Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x(0)y(t) - x(t)y(0) &= \int_0^t \left[x(0)\dot{y}(s) - \dot{x}(s)y(0)\right] ds \\ &= \int_0^t 0\ ds \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t)$ est colinéaire à $X(0)$.
Maintenant que nous avons réduit le problème à une dimension, il est aisé de rajouter quelques hypothèses raisonnables sur le potentiel pour s'assurer que la vitesse s'annulera une 2e fois.

2 Début de la preuve : circulation de la vitesse

Ebauche de la preuve

Récapitulons l'objectif de ce travail. Nous essayons de montrer l'existence d'orbites brake dans divers potentiels bidimensionnels.

Il est à présent temps de donner une définition précise de ce qu'est une orbite brake, et une preuve rigoureuse de leur périodicité - nous ne l'avons jusqu'ici fait qu'informellement, dans l'introduction.

Définition 2.1. Soit $\mathcal{L} : E_{pos} \times E_{vit} \to \mathbb{R}$ un lagrangien permettant de définir un flot. On appelle orbite brake une solution x de l'équation d'Euler-Lagrange telle que pour deux instants distincts t_1 et t_2, $\dot{x}(t_1) = \dot{x}(t_2) = 0$.

Théorème 2.1. *Soit x une orbite brake pour un lagrangien $\mathcal{L}$.*
On note t_1 et t_2 deux instants d'annulation de la vitesse.
$2\,|t_2 - t_1|$ est une période de x.

Démonstration. On a supposé avoir unicité des solutions de l'équation d'Euler-Lagrange associée à $\mathcal{L}$.
Or $t \mapsto x(t_1 + t)$ et $t \mapsto x(t_1 - t)$ sont deux solutions de l'équation d'Euler-Lagrange avec même condition initiale $(x(t_1), 0)$.
Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$x(t_1 + t) = x(t_1 - t) \qquad (i)$$

De même, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$x(t_2 + t) = x(t_2 - t) \qquad (ii)$$

On en tire :

$$\begin{aligned} x(t + 2(t_2 - t_1)) &= x(t_2 + t + t_2 - 2t_1) \\ &= x(t_2 - t - t_2 + 2t_1) && (ii) \\ &= x(t_1 - t + t_1) \\ &= x(t_1 + t - t_1) && (i) \\ &= x(t) \end{aligned}$$

Finalement, $2\,|t_2 - t_1|$ est une période de x.

□

Notre objectif est donc de montrer l'existence de telles orbites pour différents potentiels. Récapitulons ceux qui nous intéressent.

Le potentiel harmonique :

$$\begin{aligned} V : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{2}\|x\|^2 \end{aligned}$$

Pour ce potentiel, il est très facile de montrer qu'en lâchant une particule de n'importe quelle position on obtient une orbite brake, car on est capable de donner une expression explicite des solutions.

Le potentiel invariant par rotation :

$$\begin{aligned} V : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(\|x\|) \end{aligned}$$

avec f une fonction strictement croissante, qui tend vers $+\infty$, et de dérivées impaires nulles en 0. C'est une généralisation du potentiel harmonique. Comme on l'a vu dans la partie précédente, on peut montrer que toutes les positions intiales conduisent à des orbites brake en utilisant l'intégrale première associée à l'invariance par rotation. [3]

Le potentiel harmonique perturbé :

$$\begin{aligned} V : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{2}\|x\|^2 + \delta(x) \end{aligned}$$

où δ est une fonction lisse, nulle au voisinage du cercle unité et dont on peut contrôler la norme infinie des dérivées. Ici on est face à une question plus difficile : comme δ ne présente aucune symétrie, il n'y a plus d'espoir que toutes les positions initiales conduisent à une orbite brake.

Il va donc plutôt s'agir de démontrer qu'il est possible de choisir parmi les points du cercle unité un point qui y conduit. Dès à présent, je vais résumer informellement la stratégie de ma preuve, puis la fin du rapport consistera à rendre ces idées rigoureuses.

Lâchons la particule depuis un point du cercle unité. En l'absence de perturbation δ, la vitesse de la particule s'annulerait au temps $t = \pi$. En présence de la perturbation, quitte à supposer $grad\ \delta$ suffisamment petit, on aura une annulation de la vitesse radiale (la dérivée de la distance à 0 de la particule) à un instant τ proche de π.

A cet instant τ, trois possibilités : soit la vitesse angulaire (mesurée dans le sens direct) s'annule également, et nous avons affaire à une orbite brake (c'est gagné !) ; soit la vitesse angulaire est positive (la particule tourne légèrement dans le sens direct), soit la vitesse angulaire est négative (la particule tourne légèrement dans le sens indirect, c'est ce qui se passe sur l'illustration ci-dessus).

Si on s'intéresse maintenant à toutes les positions initiales possibles sur le cercle unité, remarquons que la seule façon d'éviter l'existence d'orbites brake est qu'à l'instant τ, toutes les particules tournent dans le sens direct ou toutes les particules tournent dans le sens indirect. En effet, si ce n'était pas le cas, on trouverait une orbite brake en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la vitesse angulaire.

La question est donc : est-il possible, en lâchant en même temps une particule depuis chaque point du cercle unité, au bout d'un certain temps, qu'elles tournent toutes dans le même sens ? Cette situation hypothétique peut choquer l'intuition physique : on a l'impression qu'une symétrie, présente au moment ou on lâche les particules, se serait brisée lors de l'évolution temporelle.

3. On peut évidemment démontrer ce résultat de manière plus élémentaire, mais je trouvais utile de voir un exemple d'application classique du théorème de Noether avant son utilisation plus incongrue dans les paragraphes suivants.

Mais cette symétrie que l'on souhaite exploiter n'apparaît que lorsqu'on s'intéresse à toutes les particules en même temps, il n'y a donc pas d'espoir de lui appliquer directement le théorème de Noether : il faut commencer par définir un nouveau lagrangien, qui décrirait à lui seul le mouvement d'une infinité de particules. C'est ce que nous allons faire de suite.

Lagrangien associé à un lacet

Ainsi nous souhaiterions définir un lagrangien qui permettrait de définir l'évolution non pas d'une particule dans un potentiel, mais d'une infinité de particules évoluant dans le même potentiel, réparties sur un lacet quelconque. L'espace des phases serait alors $E_{pos} \times E_{vit}$ avec $E_{pos} = E_{vit} = C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ où le 2π en indice précise qu'on ne s'intéresse qu'aux fonctions 2π-périodiques. Inspirés par la formule générale du lagrangien comme différence de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, proposons le lagrangien suivant :

Définition 2.2. Soit $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un potentiel. On appelle lagrangien dans lacets dans V la fonction :

$$\begin{aligned} \mathscr{L} : C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \times C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) &\to \mathbb{R} \\ (x, v) &\mapsto \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} v(s)^2 ds - \int_0^{2\pi} V(x(s))^2 ds \end{aligned}$$

Il s'agit de démontrer que les solutions du flot de ce lagrangien redonnent bien, quand elles sont prises ponctuellement, les solutions du lagrangien décrivant l'évolution d'une seule particule $\mathcal{L}$.

Théorème 2.2. *Soit $\Gamma \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R} \times [0, T], \mathbb{R}^2)$, la condition de 2π-périodicité portant sur la première variable. Si $t \mapsto (s \mapsto \Gamma(s, t))$ vérifie le principe de moindre action pour le lagrangien $\mathscr{L}$, alors pour tout $s \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \Gamma(s, t)$ vérifie le principe de Maupertuis pour le lagrangien $\mathcal{L}$.*

Démonstration. Raisonnons par contraposée : s'il existe s_0 tel que $(t \mapsto \Gamma(s_0, t)) \overset{(def)}{=} x$ n'est pas un point critique de l'action $\mathcal{S}$ (associée au lagrangien $\mathcal{L}$), alors montrons que $t \mapsto (s \mapsto \Gamma(s, t))$ n'est pas un point critique de l'action $\mathscr{S}$ (associée au lagrangien $\mathscr{L}$).
Comme $d\mathcal{S}_x \neq 0$, il existe $h \in C^\infty([0, T], \mathbb{R}^2)$ tel que

$$\frac{\mathcal{S}(x + \lambda h) - \mathcal{S}(x)}{\lambda} \underset{\lambda \to 0}{\longrightarrow} a < 0$$

On se sert de cette perturbation de x qui diminue son action $\mathcal{S}$ pour définir une perturbation de Γ qui va diminuer son action $\mathscr{S}$. Soit $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} k_\varepsilon : \mathbb{R} \times [0, T] &\to \mathbb{R} \\ (s, t) &\mapsto \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-(\frac{s + 2k\pi}{\varepsilon})^2} \right) h(t) \end{aligned}$$

On peut alors montrer que pour ε suffisamment petit,

$$\frac{\mathscr{S}(\Gamma + \lambda k_\varepsilon) - \mathscr{S}(\Gamma)}{\lambda} \underset{\lambda \to 0}{\longrightarrow} b_\varepsilon \in \left[\frac{3a}{2}, \frac{a}{2} \right]$$

Or $0 \notin \left[\frac{3a}{2}, \frac{a}{2} \right]$, donc $d\mathscr{S}_\Gamma \neq 0$. □

Application du théorème de Noether

Maintenant que nous avons décrit par un lagrangien $\mathscr{L}$ le déplacement simultané d'une infinité de particules, nous pouvons rechercher des symétries dans ce nouveau lagrangien.

Théorème 2.3. *La famille $(\psi_s)_{s\in\mathbb{R}}$ de transformations de l'espace des positions, définie par, pour tout $s \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned}\psi_s : C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R}^2) &\to C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)\\ \gamma &\mapsto (r \mapsto \gamma(r+s))\end{aligned}$$

est un groupe à un paramètre de symétries du lagrangien $\mathscr{L}$.

Démonstration. On vérifie un par un les points de la **définition 1.4.**, sans difficulté particulière, sauf peut-être pour les questions de régularité. □

Dès lors, nous pouvons calculer l'intégrale première du mouvement que le théorème de Noehter associe à cette symétrie.

Théorème 2.4. *Soit $\alpha, \beta \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$. On note $\Gamma \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ (la condition de 2π-périodicité porte encore sur la première variable) la fonction de deux variables telle que pour tout $s \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \Gamma(s,t)$ soit solution de l'équation d'Euler-Lagrange associée à $\mathcal{L}$, avec condition initiale $\Gamma(s,0) = \alpha(s)$ et $\frac{\partial\Gamma}{\partial t}(s,0) = \beta(s)$.*
Alors la fonction suivante de t est constante :

$$t \mapsto \int_0^{2\pi} \frac{\partial\Gamma}{\partial t}(s,t) \cdot \frac{\partial\Gamma}{\partial s}(s,t)\ ds$$

Nous l'appellerons circulation de la vitesse.

Démonstration. Commençons par noter que, d'après le **théorème 2.2**, Γ est solution de l'équation d'Euler-Lagrange associée à $\mathscr{L}$. Dans cette preuve, nous ferons donc apparaître le résultat que nous voulons montrer comme une conséquence du théorème de Noether appliqué à une symétrie de $\mathscr{L}$.
Soit $(x,v) \in \left(C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)\right)^2$. Calculons l'intégrale première du mouvement associé au groupe à un paramètre de symétries $(\psi_s)_{s\in\mathbb{R}}$ du **théorème 2.3**.
$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v}_{(x,v)}$ est la forme linéaire :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial v}_{(x,v)} : C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R}^2) &\to \mathbb{R}\\ w &\longmapsto \int_0^{2\pi} v(s)\cdot w(s)\ ds\end{aligned}$$

et $\left[\frac{d}{ds}\psi_s(x)\right]_{s=0}$ est le vecteur x'.
Donc, d'après le théorème de Noether, $\mathscr{C}(x,v) = \int_0^{2\pi} v(s)\cdot x'(s)\ ds$ est une intégrale première du mouvement.
Donc la fonction $t \mapsto \mathscr{C}(\Gamma(.,t), \frac{\partial\Gamma}{\partial t}(.,t))$ est constante.
Donc la fonction $t \mapsto \int_0^{2\pi} \frac{\partial\Gamma}{\partial t}(s,t)\cdot\frac{\partial\Gamma}{\partial s}(s,t)\ ds$ est constante.

□

Remarque. Peut-être, au cours de la lecture de ces deux premières parties de mon rapports, avez-vous été choqué - à raison - par le manque d'attention apportée à la rigueur des démonstrations. En particulier, je reconnais m'être peu soucié des normes à mettre sur mes espaces de dimensions infinies pour donner du sens

aux différentielles que j'invoque.
Si je me suis permis d'être elliptique sur ces questions, c'est que seul le **théorème 2.4** nous sera utile dans la preuve de l'existence d'une orbite brake, et que ce dernier peut se démontrer plus directement - simplement en dérivant cette fonction et en trouvant 0.
Si j'ai passé autant de temps à vous parler de dynamique lagrangienne et de théorème de Noether, c'est que c'est par ce chemin que je me suis intéressé la circulation de la vitesse : bien que parfaitement rigoureux, un rapport qui commencerait par poser cette fonction et la dériver me paraîtrait incongru, on se demanderait d'où j'ai sorti cette intégrale étrange.

CE RAPPORT DE STAGE DONT VOUS ETES LE HEROS

L'étudiant a démontré le **théorème 2.4** comme un sagouin. Comment réagissez-vous ?

- **Vous êtes quelqu'un de détendu** et savoir si le **théorème 2.4** a été véritablement démontré ou non ne vous intéresse pas vraiment $\Longrightarrow$ *passez directement à la partie 3.*
- **Vous êtes quelqu'un de forcené** et le manque de rigueur vous fait pousser des boutons $\Longrightarrow$ *reprenez tout depuis le début en choisissant les bonnes normes et en démontrant la différentiabilité de toutes les fonctions.*
- **Vous êtes quelqu'un de rigoriste mais fainéant** et vous apprécieriez voir le **théorème 2.4** démontré vite fait bien fait $\Longrightarrow$ *Jetez un coup d'œil à la démonstration alternative que l'étudiant vous propose ci-dessous, puis rejoignez le lecteur détendu.*

Démonstration. Notons

$$\mathscr{C}(t) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s,t) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,t)\ ds$$

Dérivons cette fonction :

$$\begin{aligned}\mathscr{C}'(t) &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial s \partial t}(s,t) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s,t) \ + \ \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,t) \cdot \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2}(s,t) \right) ds \qquad \textit{(convergence dominée + Leibniz)} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial s \partial t}(s,t) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s,t)\ ds \ + \ \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,t) \cdot \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2}(s,t)\ ds\end{aligned}$$

Chacune de ces deux intégrales est nulle, comme nous allons le voir maintenant :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial s \partial t}(s,t) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s,t)\ ds &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial s \partial t}(s,t) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s,t)\ ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial s \partial t}(s,t) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s,t) \ + \ \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s,t) \cdot \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial s \partial t}(s,t) \right) ds \\ &= \frac{1}{2} \left[\left\| \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s,t) \right\|^2 \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2} \left(\left\| \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(2\pi,t) \right\|^2 - \left\| \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(0,t) \right\|^2 \right) \\ &= 0 \qquad \textit{(car } \Gamma \textit{ est } 2\pi\textit{-périodique)}\end{aligned}$$

Passons au deuxième membre de l'expression de $\mathscr{C}'(t)$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,t) \cdot \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2}(s,t)\, ds &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,t) \cdot \left(-(grad\ V)_{\Gamma(s,t)}\right)\, ds && \textit{(équation de Newton)} \\
&= -\left[V(\Gamma(s,t))\right]_0^{2\pi} \\
&= -V(\Gamma(2\pi,t)) + V(\Gamma(0,t)) \\
&= 0 && \textit{(car } \Gamma \textit{ est } 2\pi\textit{-périodique)}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\mathscr{C}'(t) = 0$$

□

3 Fin de la peuve : lacet des apogées

Maintenant que nous avons accès au **théorème 2.4**, on serait tenté de l'appliquer de la manière suivante :

Pour $\alpha(s) = \begin{pmatrix} cos\ s \\ sin\ s \end{pmatrix}$, et $\beta = 0$, la circulation de la vitesse initiale $\mathscr{C}(0)$ est nulle.
Donc elle est également nulle à l'instant τ du prochain maximum local de la distance à 0.
Donc il existe un certain s tel que $\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,\tau) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s,\tau) = 0$.
Par ailleurs et par définition de τ :

$$\Gamma(s,\tau) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s,\tau) = 0$$

Comme $\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s,\tau)$ est nul lorsqu'il est projeté sur deux direction distinctes, $\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s,\tau) = 0$.
C'est fini : le point $\begin{pmatrix} cos\ s \\ sin\ s \end{pmatrix}$ conduit à une orbite dont la vitesse s'annule en $t = 0$ et en $t = \tau$: c'est une orbite brake.

Cette tentative présente deux failles, que nous allons essayer de combler dans cette 3e partie :
Tout d'abord, en présence de la perturbation δ, l'instant où un maximum local de la distance à 0 est atteint n'est pas un instant commun à toutes les positions de départ, mais une fonction $\tau(s)$ de la position de départ. Il va donc falloir définir proprement cette fonction, étudier sa régularité, et utiliser astucieusement le **théorème 2.4**. Nous le ferons dans les deux prochains paragraphes.
Ensuite il va falloir vérifier que les deux directions selon lesquelles on aura réussi à montrer que la vitesse $\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s,\tau(s))$ s'annule sont bien indépendantes. Nous le ferons dans les deux derniers paragraphes.

Définition et régularité

Rappelons le cadre de notre étude. Nous nous intéressons à une particule évoluant dans le potentiel harmonique perturbé :

$$\begin{aligned} V : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ X &\mapsto \frac{1}{2}\|X\|^2 + \delta(X) \end{aligned}$$

avec δ lisse et nul au voisinage du cercle unité.
L'espace des phases est donc $E_{pos} \times E_{vit}$ avec $E_{pos} = E_{vit} = \mathbb{R}^2$.

Définition 3.1. On appelle champ de vecteur radial unitaire la fonction suivante :

$$\begin{aligned} u_r : \mathbb{R}^2\backslash\{0\} &\to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On appelle champ de vecteur angulaire unitaire la fonction suivante :

$$\begin{aligned} u_\theta : \mathbb{R}^2\backslash\{0\} &\to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Théorème 3.1. *Ces champs de vecteurs sont différentiables et pour tout* $X \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ *:*

- $\|\|(du_r)_X\|\| = \|\|(du_\theta)_X\|\| = 1/\|X\|$
- $(du_r)_X(u_r(X)) = 0$
- $u_r(X)$ *est orthogonal à l'image de* $(du_r)_X$

Démonstration. Calcul sans difficulté particulière. □

Définition 3.2. On appelle vitesse radiale la fonction suivante de l'espace des phases privé des configurations situées à l'origine :

$$\begin{aligned} \mathrm{VR} : (E_{pos} \backslash \{0\}) \times E_{vit} &\to \mathbb{R} \\ (X, W) &\mapsto W \cdot u_r(X) \end{aligned}$$

Théorème 3.2. *Supposons, pour tout* $X \in \mathbb{R}^2$

$$\|(grad\ \delta)_X\| \leqslant \frac{e^{-\frac{5\pi}{4}}}{5}$$

Soit $\begin{pmatrix} cos\ s \\ sin\ s \end{pmatrix}$ *un point du cercle unité de* $\mathbb{R}^2$*.*
On note $Y^{(s)} \in C^\infty(\mathbb{R}, E_{pos} \times E_{vit})$ *la solution des équations d'Euler-Lagrange associées au potentiel harmonique perturbé avec condition initiale :*

$$Y^{(s)}(0) = \begin{pmatrix} cos\ s \\ sin\ s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c'est-à-dire position initiale $\begin{pmatrix} cos\ s \\ sin\ s \end{pmatrix}$ *et vitesse initiale nulle).*
Alors la vitesse radiale de $Y^{(s)}(t)$ *s'annule exactement une fois quand* t *varie dans l'intervalle* $\left]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[$*.*

Avant de démontrer ce théorème, voici la définition que celui-ci permet de poser :

Définition 3.3. On appelle instant d'apogée associé à s, et on note $\tau(s)$ l'instant d'annulation de la vitesse radiale en question.

Démonstration. $Y^{(s)}$ est solution de l'équation d'Euler-Lagrange associée au potentiel $V(X) = \frac{1}{2}X^2 + \delta(X)$:

$$\dot{Y}^{(s)}(t) = A(Y^{(s)}(t))$$

où pour tout $\begin{pmatrix} X \\ W \end{pmatrix} \in E_{pos} \times E_{vit}$,

$$A\begin{pmatrix} X \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W \\ -(grad\ V)(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W \\ -X - (grad\ \delta)(X) \end{pmatrix}$$

On notera également $Y^{(s)}(t) = \begin{pmatrix} X^{(s)}(t) \\ W^{(s)}(t) \end{pmatrix}$.

L'idée de la démonstration est la suivante : le résultat est vrai dans le cas non perturbé ($\delta = 0$). Pour le cas perturbé, on va montrer que le comportement des solutions est proche du cas non perturbé à l'aide du lemme de Grönwall.
On introduit donc une notation pour la solution de l'équation non perturbée (avec la même condition initiale) :
$\tilde{Y}^{(s)}$ est solution de l'équation d'Euler-Lagrange associée au potentiel $\tilde{V}(X) = \frac{1}{2}X^2$:

$$\dot{\tilde{Y}}^{(s)}(t) = \tilde{A}(\tilde{Y}^{(s)}(t))$$

où pour tout $\begin{pmatrix} X \\ W \end{pmatrix} \in E_{pos} \times E_{vit}$,

$$\tilde{A}\begin{pmatrix} X \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W \\ -(grad\ \tilde{V})(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W \\ -X \end{pmatrix}$$

On notera également $\tilde{Y}^{(s)}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{X}^{(s)}(t) \\ \tilde{W}^{(s)}(t) \end{pmatrix}$.
Nous voilà prêts à estimer la différence des dérivées de ces deux fonctions :

$$\begin{aligned}
\dot{Y}^{(s)}(t) - \dot{\tilde{Y}}^{(s)}(t) &= A(Y^{(s)}(t)) - \tilde{A}(\tilde{Y}^{(s)}(t)) \\
&= A(Y^{(s)}(t)) - \tilde{A}(Y^{(s)}(t)) + \tilde{A}(Y^{(s)}(t)) - \tilde{A}(\tilde{Y}^{(s)}(t)) \\
&= \begin{pmatrix} W^{(s)}(t) \\ -X^{(s)}(t) - (grad\ \delta)_{X^{(s)}(t)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} W^{(s)}(t) \\ -X^{(s)}(t) \end{pmatrix} + \tilde{A}(Y^{(s)}(t)) - \tilde{A}(\tilde{Y}^{(s)}(t)) \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ -(grad\ \delta)_{X^{(s)}(t)} \end{pmatrix} + \tilde{A}(Y^{(s)}(t)) - \tilde{A}(\tilde{Y}^{(s)}(t))
\end{aligned}$$

Or

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -(grad\ \delta)_{X^{(s)}(t)} \end{pmatrix} \right\| = \|(grad\ \delta)_{X^{(s)}(t)}\| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-\frac{5\pi}{4}}}{5}$$

De plus, d'après l'inégalité des accroissement finis, en notant $\mathbb{D}_1$ le disque de centre 0 et de rayon 1 :

$$\|\tilde{A}(Y^{(s)}(t)) - \tilde{A}(\tilde{Y}^{(s)}(t))\| \leqslant \left(\sup_{\xi \in \mathbb{D}_1} |||d\tilde{A}_\xi||| \right) \|Y^{(s)}(t) - \tilde{Y}^{(s)}(t)\| = \|Y^{(s)}(t) - \tilde{Y}^{(s)}(t)\|$$

Ce qui nous donne :

$$\|\dot{Y}^{(s)}(t) - \dot{\tilde{Y}}^{(s)}(t)\| \ \leqslant\ \|Y^{(s)}(t) - \tilde{Y}^{(s)}(t)\| \ +\ \frac{\mathrm{e}^{-\frac{5\pi}{4}}}{5}$$

Donc d'après le lemme de Grönwall, pour tout $t \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$:

$$\|Y^{(s)}(t) - \tilde{Y}^{(s)}(t)\| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{t-\frac{5\pi}{4}}}{5}$$

Donc pour tout $t \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$:

$$\|Y^{(s)}(t) - \tilde{Y}^{(s)}(t)\| \leqslant \frac{1}{5} \qquad (i)$$

Maintenant que nous avons montré la relation (i) qui contrôle la solution perturbée par la solution non perturbée, nous allons pouvoir démontrer que $t \mapsto \mathrm{VR}(Y^{(s)}(t))$ s'annule exactement une fois sur l'intervalle $[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$. Pour ce faire, il suffira de montrer les trois points suivants :

- $\mathrm{VR}(Y^{(s)}(\frac{3\pi}{4})) > 0$
- $\mathrm{VR}(Y^{(s)}(\frac{5\pi}{4})) < 0$
- la fonction $t \mapsto \mathrm{VR}(Y^{(s)}(t))$ décroît strictement.

Commençons par les deux premiers points :

$$\begin{aligned}
\mathrm{VR}(Y^{(s)}(\frac{3\pi}{4})) &= W^{(s)}(\frac{3\pi}{4}) \cdot u_r(X^{(s)}(\frac{3\pi}{4})) \\
&= \tilde{W}^{(s)}(\frac{3\pi}{4}) \cdot u_r(\tilde{X}^{(s)}(\frac{3\pi}{4})) \\
&\qquad + \left[W^{(s)}(\frac{3\pi}{4}) - \tilde{W}^{(s)}(\frac{3\pi}{4})\right] \cdot u_r(\tilde{X}^{(s)}(\frac{3\pi}{4})) \\
&\qquad + W^{(s)}(\frac{3\pi}{4}) \cdot \left[u_r(X^{(s)}(\frac{3\pi}{4})) - u_r(\tilde{X}^{(s)}(\frac{3\pi}{4}))\right] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&\qquad + \left[W^{(s)}(\frac{3\pi}{4}) - \tilde{W}^{(s)}(\frac{3\pi}{4})\right] \cdot u_r(\tilde{X}^{(s)}(\frac{3\pi}{4})) \\
&\qquad + W^{(s)}(\frac{3\pi}{4}) \cdot \left[u_r(X^{(s)}(\frac{3\pi}{4})) - u_r(\tilde{X}^{(s)}(\frac{3\pi}{4}))\right]
\end{aligned}$$

Le premier terme de cette somme est positif. Nous allons majorer les 2 autres termes avec l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour prouver qu'ils ne sont pas en mesure de rendre l'expression positive :

$$\begin{aligned}
\left|\left[W^{(s)}(\frac{3\pi}{4}) - \tilde{W}^{(s)}(\frac{3\pi}{4})\right] \cdot u_r(\tilde{X}^{(s)}(\frac{3\pi}{4}))\right| &\leqslant \left\|[W^{(s)}(\frac{3\pi}{4}) - \tilde{W}^{(s)}(\frac{3\pi}{4})\right\| \cdot \left\|u_r(\tilde{X}^{(s)}(\frac{3\pi}{4}))\right\| \\
&\leqslant \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

où l'on a majoré le facteur de gauche par la relation (i).
Passons au dernier terme :

$$\begin{aligned}
\left|W^{(s)}(\frac{3\pi}{4}) \cdot \left[u_r(X^{(s)}(\frac{3\pi}{4})) - u_r(\tilde{X}^{(s)}(\frac{3\pi}{4}))\right]\right| &\leqslant \left\|W^{(s)}(\frac{3\pi}{4})\right\| \cdot \left\|u_r(X^{(s)}(\frac{3\pi}{4})) - u_r(\tilde{X}^{(s)}(\frac{3\pi}{4}))\right\| \\
&\leqslant 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

où l'on a majoré le facteur de droite par la relation (i) et le **théorème 3.1**.
On a donc

$$\mathrm{VR}(Y^{(s)}(\frac{3\pi}{4})) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{5} - \frac{3}{5} > 0$$

ce qui prouve le premier point.
Le deuxième point se prouve par un raisonnement très similaire, passons au troisième point.
Nous souhaitons montrer que la fonction $f : t \mapsto \mathrm{VR}(Y^{(s)}(t))$ décroît strictement. Dérivons-la :

$$f(t) = W^{(s)}(t) \cdot u_r(X^{(s)}(t))$$

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \dot{W}^{(s)}(t) \cdot u_r(X^{(s)}(t)) \ + \ W^{(s)}(t) \cdot (du_r)_{X^{(s)}(t)}(\dot{X}^{(s)}(t)) \\
&= (grad\ V)_{X^{(s)}(t)} \cdot u_r(X^{(s)}(t)) \ + \ W^{(s)}(t) \cdot (du_r)_{X^{(s)}(t)}(W^{(s)}(t)) \\
&= (grad\ V)_{X^{(s)}(t)} \cdot u_r(X^{(s)}(t)) \ + \ [W^{(s)}(t) - \tilde{W}^{(s)}(t)] \cdot (du_r)_{X^{(s)}(t)}(W^{(s)}(t) - \tilde{W}^{(s)}(t))
\end{aligned}$$

La dernière ligne est une conséquence du **théorème 3.1**.
Pour conclure, montrons que le premier terme est négatif et que le deuxième terme est petit.

Soit $t \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$.

$$\begin{aligned}
\|X^{(s)}(t)\| &\geqslant \|\tilde{X}^{(s)}(t)\| - \|\tilde{X}^{(s)}(t) - X^{(s)}(t)\| \\
&\geqslant \|\tilde{X}^{(s)}(t)\| - \frac{1}{5} && \textit{(relation } (i)\textit{)} \\
&\geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{5} \\
&\geqslant \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

On a donc le résultat suivant, que nous appellerons relation (ii) :

$$\forall t \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}],\ \|X^{(s)}(t)\| \geqslant \frac{1}{2}$$

Soit $t \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$.

$$\begin{aligned}
(grad\ V)_{X^{(s)}(t)} \cdot u_r(X^{(s)}(t)) &= (grad\ \tilde{V})_{X^{(s)}(t)} \cdot u_r(X^{(s)}(t)) \ +\ (grad\ \delta)_{X^{(s)}(t)} \cdot u_r(X^{(s)}(t)) \\
&\leqslant -\frac{1}{2} + \frac{1}{5} && \textit{(relations (i) et (ii))} \\
&= -\frac{3}{10}
\end{aligned}$$

Maintenant montrons que le terme $[W^{(s)}(t) - \tilde{W}^{(s)}(t)] \cdot (du_r)_{X^{(s)}(t)}(W^{(s)}(t) - \tilde{W}^{(s)}(t))$ est petit :

$$\begin{aligned}
\|[W^{(s)}(t) - \tilde{W}^{(s)}(t)] \cdot (du_r)_{X^{(s)}(t)}(W^{(s)}(t) - \tilde{W}^{(s)}(t))\| &\leqslant \|W^{(s)}(t) - \tilde{W}^{(s)}(t)\|^2 \cdot \|\!|(du_r)_{X^{(s)}(t)}|\!\| \\
&\leqslant \|\frac{1}{5}\|^2 \cdot \|\!|2|\!\| && \textit{(relation (i), (ii) et } \textbf{\textit{théorème 3.1}}\textit{)} \\
&= \frac{2}{25}
\end{aligned}$$

Donc

$$\forall t \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}],\ f'(t) \leqslant -\frac{3}{10} + \frac{2}{25} = -\frac{11}{50} < 0$$

On a montré le troisième point, et donc l'existence et l'unicité de l'instant d'apogée.

□

Théorème 3.3. *La fonction $s \mapsto \tau(s) \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*

Démonstration. La 2π-périodicité est claire : $\tau(s)$ ne dépend de s qu'à travers la position initiale $\begin{pmatrix} cos\ s \\ sin\ s \end{pmatrix}$ qui est 2π-périodique.

Pour le caractère lisse, nous allons appliquer le théorème des fonctions implicites à la fonction :

$$\begin{aligned}
\varphi : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\
(s, t) &\mapsto \mathrm{VR}(Y^{(s)}(t))
\end{aligned}$$

où l'on a repris les notations de la preuve précédente.
La fonction $(s, t) \mapsto Y^{(s)}(t)$ est lisse : c'est un résultat classique de la théorie des équations différentielles ordinaires. Donc φ l'est également.

Soit $s \in \mathbb{R}$.
Comme $\varphi(s, \tau(s)) = 0$, il n'y a plus qu'à montrer que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, \tau(s)) < 0$$

pour appliquer le théorème des fonctions implicites.
Or on avait justement montré dans la preuve précédente que :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, \tau(s)) \leqslant -\frac{11}{50} < 0$$

Donc il existe une fonction lisse $\psi :]s-\varepsilon, s+\varepsilon[\to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall r \in]s-\varepsilon, s+\varepsilon[, \quad \varphi(s, \psi(s)) = 0$$

Or par unicité du **théorème 3.2**, $\psi = \tau_{]s-\varepsilon,\ s+\varepsilon[}$.
Donc pour tout $s \in \mathbb{R}$, τ est lisse au voisinage de s.
Donc τ est lisse. □

Lancement homocline

Reprenons nos notations à deux variables pour étudier l'évolution du lacet :

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} cos\ s \\ sin\ s \end{pmatrix}$$

Pour tout $s, t \in \mathbb{R}$ on note $\Gamma(s,t)$ la position de la particule au temps t, en l'ayant lâchée à vitesse nulle à la position $\gamma(s)$ au temps $t = 0$ dans le potentiel $V(X) = \frac{1}{2}X^2 + \delta(X)$.
Puis on pose :

$$\Xi(s,t) = \Gamma(s, t + \tau(s))$$

On sait déjà, d'après le **théorème 2.4**, que la circulation de la vitesse est constante le long de Γ et de Ξ. Autrement dit, les deux fonctions suivantes sont constantes :

$$\mathscr{C}_\Gamma : t \mapsto \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,t) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s,t)\ ds$$

$$\mathscr{C}_\Xi : t \mapsto \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Xi}{\partial s}(s,t) \cdot \frac{\partial \Xi}{\partial t}(s,t)\ ds$$

Par ailleurs, $\mathscr{C}_\Gamma(0) = 0$, donc $\mathscr{C}_\Gamma$ est constante égale à 0. En revanche, comme Ξ est définie à partir de Γ par un décalage temporel dépendant de s, on ne sait a priori pas quelle est la valeur commune à tous les $\mathscr{C}_\Xi(t)$. Cette partie a pour objet de montrer que $\mathscr{C}_\Xi$ est également constante égale à 0. Pour ce faire, nous allons construire une famille de fonctions, indicée par $\varepsilon > 0$, arbitrairement proche de Ξ, dont la circulation de la vitesse sera nulle.

Commençons par définir une famille de potentiels. Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère :

$$V^{(\varepsilon)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$X \mapsto \chi\left(\frac{X - \|X\|}{\varepsilon^3}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon^2\right) + \left(1 - \chi\left(\frac{X - \|X\|}{\varepsilon^3}\right)\right) V(X)$$

où χ est une fonction lisse nulle sur $]-\infty, 0[$, égale à 1 sur $]1, +\infty[$, comprise entre 0 et 1, croissante, de dérivée bornée par 2. On choisit le même χ pour définir tous les $V^{(\varepsilon)}$.

Commentons un peu, pour ε fixé, ce nouveau potentiel : il coïncide avec V sur le disque unité $\mathbb{D}_1$, il est constant égal à $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon^2$ à l'extérieur du disque $\mathbb{D}_{1+\varepsilon^3}$, et il se comporte relativement bien sur la couronne $\mathbb{D}_{1+\varepsilon^3} \backslash \mathbb{D}_1$ grâce aux hypothèses restricitives placées sur χ. Nous allons très bientôt voir pourquoi cette valeur particulière de $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon^2$ pour l'altitude du plateau.

On définit, pour tout $s, t \in \mathbb{R}$, $\Gamma^{(\varepsilon)}(s,t)$: c'est la position au temps t d'une particule lancée à la vitesse $-\varepsilon\gamma(s)$ à la position $\gamma(s)$ au temps 0 dans le potentiel $V^{(\varepsilon)}$.

On peut alors définir :

$$\Xi^{(\varepsilon)}(s,t) = \Gamma^{(\varepsilon)}(s, t + \tau(s))$$

Vérifions que la circulation la vitesse de $\Gamma^{(\varepsilon)}$ est nulle. Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{C}_{\Gamma^{(\varepsilon)}}(t) &= \mathscr{C}_{\Gamma^{(\varepsilon)}}(0) && \textit{(théorème 2.4)} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Gamma^{(\varepsilon)}}{\partial s}(s,0) \cdot \frac{\partial \Gamma^{(\varepsilon)}}{\partial t}(s,0)\, ds \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -sin\ s \\ cos\ s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\varepsilon\ cos\ s \\ -\varepsilon\ sin\ s \end{pmatrix} ds \\
&= \int_0^{2\pi} 0\ ds \\
&= 0
\end{aligned}$$

Maintenant, montrons que $\mathscr{C}_{\Xi^{(\varepsilon)}}$ est également constante égale à 0. Pour ce, remarquons que les particules, lancées à la vitesse $-\varepsilon\gamma(s)$ à la position $\gamma(s)$ ont pour énergie potentielle $\frac{1}{2}$ et pour énergie cinétique $\frac{1}{2}\varepsilon^2$. Leur énergie mécanique est donc exactement égale à l'énergie du plateau. Quand t tend vers $-\infty$, elles vont donc suivre ce qu'on appelle une trajectoire homocline : elles auront assez d'énergie pour arriver arbitrairement proche du plateau, mais pas assez pour l'atteindre. La position de la particule issue de $\gamma(s)$ va donc tendre vers $(1+\varepsilon^3)\gamma(s)$ et sa vitesse vers 0. Cette convergence aura lieu uniformément en s car $V^{(\varepsilon)}$ est invariant par rotation sur la couronne $\mathbb{D}_{1+\varepsilon^3} \backslash \mathbb{D}_1$.

On a donc

$$\begin{aligned}
\mathscr{C}_{\Xi^{(\varepsilon)}}(t) &= \varinjlim_{t \to -\infty} \mathscr{C}_{\Xi^{(\varepsilon)}}(t) && \textit{(théorème 2.4)} \\
&= \varinjlim_{t \to -\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Xi^{(\varepsilon)}}{\partial s}(s,t) \cdot \frac{\partial \Xi^{(\varepsilon)}}{\partial t}(s,t)\, ds \\
&= \int_0^{2\pi} \varinjlim_{t \to -\infty} \frac{\partial \Xi}{\partial s}(s,t) \cdot \frac{\partial \Xi^{(\varepsilon)}}{\partial t}(s,t)\, ds && \textit{(convergence uniforme)} \\
&= \int_0^{2\pi} (1+\varepsilon^3) \begin{pmatrix} -sin\ s \\ cos\ s \end{pmatrix} \cdot 0\ ds \\
&= \int_0^{2\pi} 0\ ds \\
&= 0
\end{aligned}$$

Comme $\Xi^{(\varepsilon)}$ est arbitrairement proche de Ξ, on conclut en faisant tendre ε vers 0. Voir **Annexe B** pour une explication détaillée du mode de convergence qui permet cette conclusion.
On a donc montré :

Théorème 3.4. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$:*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial \Xi}{\partial s}(s,t) \cdot \frac{\partial \Xi}{\partial t}(s,t)\ ds = 0$$

Transversalité

Comme $\int_0^{2\pi} \frac{\partial \Xi}{\partial s}(s,0) \cdot \frac{\partial \Xi}{\partial t}(s,0)\ ds = 0$, il existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{\partial \Xi}{\partial s}(s_0,0) \cdot \frac{\partial \Xi}{\partial t}(s_0,0) = 0$$

Alors on a :

$$\frac{\partial \Xi}{\partial s}(s_0,0) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s_0,\tau(s_0)) = 0$$

Or on avait déjà, par définition de $\tau(s_0)$:

$$u_r(\Gamma(s_0,\tau(s_0))) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s_0,\tau(s_0)) = 0$$

Si on savait que $u_r(\Gamma(s_0,\tau(s_0)))$ et $\frac{\partial \Xi}{\partial s}(s_0,0)$ ne sont pas colinéaires, on pourrait conclure :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s_0,\tau(s_0)) = 0$$

c'est-à-dire que la vitesse d'une particule lâchée à vitesse nulle en $\gamma(s_0)$ s'annule à nouveau au bout d'un temps $\tau(s_0)$: on aurait donc enfin trouvé une orbite brake (de période $2\tau(s_0)$).
Il nous faut donc montrer que ces deux vecteurs ne sont effectivement pas colinéaires :

Théorème 3.5. *Supposons, pour tout $X \in \mathbb{R}^2$,*

$$|||(d^2\delta)_X||| \leqslant e^{-4\pi}$$

Alors $u_r(\Gamma(s_0,\tau(s_0)))$ et $\frac{\partial \Xi}{\partial s}(s_0,0)$ ne sont pas colinéaires.

Démonstration. Pour démontrer ce théorème, nous allons employer la même stratégie que pour le **théorème 3.2** : nous allons démontrer le résultat en comparant les solutions de l'équation perturbée à celle de l'équation non perturbée $\delta = 0$. Nous allons donc reprendre les notations de cette démonstration, et notamment la convention selon laquelle pour toute grandeur relative à l'équation, la même notation surmontée d'un tilde désigne la même grandeur relative à l'équation non perturbée.

Par ailleurs, aucun argument de cette preuve n'utilisera une particularité du nombre réel s_0. Nous le démontrerons donc pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Enfin, comme nous avons supposé δ nulle au voisinage du cercle unité depuis le début de ce rapport, remarquons que l'hypothèse $|||(d^2\delta)_X||| \leqslant \mathrm{e}^{-4\pi}$ implique $\|(grad\ \delta)_X\| \leqslant \mathrm{e}^{-4\pi}$. Nous nous trouvons donc dans

les conditions qui permettent de définir τ et d'assurer sa régularité.
Soit $s \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Xi}{\partial s}(s,\tau(s)) &= \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s,\tau(s)) + \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s,\tau(s))\tau'(s) \\ &= u_\theta(\Gamma(s,\tau(s)))\ cos(\tau(s)) \\ &\qquad + \frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial s}(s,\tau(s)) - u_\theta(\Gamma(s,\tau(s)))\ cos(\tau(s)) \\ &\qquad + \frac{\partial\ \Gamma}{\partial s}(s,\tau(s)) - \frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial s}(s,\tau(s)) \\ &\qquad + \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s,\tau(s))\tau'(s)\end{aligned}$$

Notons que $u_\theta(\Gamma(s,\tau(s)))$ est perpendiculaire à $u_r(\Gamma(s,\tau(s)))$. Ainsi pour s'assurer que les deux vecteurs qui nous intéressent ne sont pas colinéaires, il suffira de s'assurer que $\frac{\partial \Xi}{\partial s}(s,\tau(s)) \cdot u_\theta(\Gamma(s,\tau(s))) \neq 0$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Xi}{\partial s}(s,\tau(s)) \cdot u_\theta(\Gamma(s,\tau(s))) &= u_\theta(\Gamma(s,\tau(s)))\ cos(\tau(s)) \cdot u_\theta(\Gamma(s,\tau(s))) \\ &\qquad + \left[\frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial s}(s,\tau(s)) - u_\theta(\Gamma(s,\tau(s)))\ cos(\tau(s))\right] \cdot u_\theta(\Gamma(s,\tau(s))) \\ &\qquad + \left[\frac{\partial\ \Gamma}{\partial s}(s,\tau(s)) - \frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial s}(s,\tau(s))\right] \cdot u_\theta(\Gamma(s,\tau(s))) \\ &\qquad + \left[\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s,\tau(s))\tau'(s)\right] \cdot u_\theta(\Gamma(s,\tau(s)))\end{aligned}$$

Le premier terme vaut $cos(\tau(s))$, qui est en dessous de $-\sqrt{2}/2$ car $\tau(s) \in [3\pi/4,\ 5\pi/4]$.
La suite de cette preuve va consister à majorer les autres termes de cette somme avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour montrer qu'il ne sont pas en mesure de contrebalancer ce premier terme négatif. Nous aboutirons en montrant que chacun des termes suivants est inférieur en valeur à absolue à 1/5.
Commençons :

$$\left|\left[\frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial s}(s,\tau(s)) - u_\theta(\Gamma(s,\tau(s)))\ cos(\tau(s))\right] \cdot u_\theta(\Gamma(s,\tau(s)))\right| \leqslant \left\|\frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial s}(s,\tau(s)) - u_\theta(\Gamma(s,\tau(s)))\ cos(\tau(s))\right\|$$

Or on connait l'expression explicite de $\frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial s}(s,\tau(s))$:

$$\frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial s}(s,\tau(s)) = u_\theta(\tilde{\Gamma}(s,\tau(s)))\ cos(\tau(s))$$

Donc

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial s}(s,\tau(s)) - u_\theta(\Gamma(s,\tau(s)))\ cos(\tau(s))\right\| &\leqslant \left\|u_\theta(\tilde{\Gamma}(s,\tau(s)))\ cos(\tau(s)) - u_\theta(\Gamma(s,\tau(s)))\ cos(\tau(s))\right\| \\ &= \left\|u_\theta(\tilde{\Gamma}(s,\tau(s))) - u_\theta(\Gamma(s,\tau(s)))\right\| \cdot |\ cos(\tau(s))| \\ &\leqslant \left\|u_\theta(\tilde{\Gamma}(s,\tau(s))) - u_\theta(\Gamma(s,\tau(s)))\right\|\end{aligned}$$

En reprenant la *relation (i)* établie dans la démonstration du **théorème 3.2**, on s'aperçoit que le segment qui relie $\tilde{\Gamma}(s,\tau(s))$ à $\Gamma(s,\tau(s))$ est inclus dans la couronne $\mathbb{D}_1 \backslash \mathbb{D}_{2/5}$. Or la différentielle de u_θ a, sur ce domaine, une norme d'opérateur inférieure à 5/2 d'après le **théorème 3.1**. Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\left\|u_\theta(\tilde{\Gamma}(s,\tau(s))) - u_\theta(\Gamma(s,\tau(s)))\right\| \leqslant \frac{5}{2}\|\tilde{\Gamma}(s,\tau(s)) - \Gamma(s,\tau(s))\|$$

Dès lors, on serait tenté d'utiliser à nouveau la *relation (i)* pour majorer le terme de droite. Malheuresement, on majorerait ainsi ce terme par $\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{2}$, ce qui ne suffit pas à nos projets.
La *relation (i)* avait été établie en supposant seulement que le gradient de δ était borné par $\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-5\pi/4}$. Mais dans le cadre de cette démonstration, nos hypothèses impliquent que ce même gradient est borné par $\mathrm{e}^{-4\pi}$. On peut donc, en appliquant le lemme de Grönwall de la même façon mais avec cette nouvelle borne, améliorer la *relation (i)* : Pour tout $t \in [0,\ 5\pi/4]$,

$$\|Y^{(s)}(t) - \tilde{Y}^{(s)}(t)\| \leqslant \mathrm{e}^{-11\pi/4} \qquad \textit{relation (i bis)}$$

Utilisons-la :

$$\begin{aligned}\left\|u_\theta(\tilde{\Gamma}(s,\tau(s))) - u_\theta(\Gamma(s,\tau(s)))\right\| &\leqslant \frac{5}{2}\|\tilde{\Gamma}(s,\tau(s)) - \Gamma(s,\tau(s))\| \\ &\leqslant \frac{5}{2}\mathrm{e}^{-11\pi/4} \\ &\leqslant \frac{1}{5}\end{aligned}$$

On a réussi à majorer le premier des trois termes par $\frac{1}{5}$. Passons au deuxième :

$$\left|\left[\frac{\partial\,\Gamma}{\partial s}(s,\tau(s)) - \frac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial s}(s,\tau(s))\right] \cdot u_\theta(\Gamma(s,\tau(s)))\right| \leqslant \left\|\frac{\partial\,\Gamma}{\partial s}(s,\tau(s)) - \frac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial s}(s,\tau(s))\right\|$$

La fonction

$$\begin{aligned}&\mathbb{R} \to \mathbb{R}^4 \\ &t \mapsto \begin{pmatrix}\frac{\partial\Gamma}{\partial s}(s,t) \\ \frac{\partial^2\Gamma}{\partial s\partial t}(s,t)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

est solution de l'équation de Jacobi associée à l'équation $\dot{Y}^{(s)}(t) = A(Y^{(s)}(t))$, donc on a :

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial^2\Gamma}{\partial t\partial s}(s,t) \\ \frac{\partial^3\Gamma}{\partial s\partial t^2}(s,t)\end{pmatrix} = (dA)_{Y^{(s)}(t)}\begin{pmatrix}\frac{\partial\Gamma}{\partial s}(s,t) \\ \frac{\partial^2\Gamma}{\partial s\partial t}(s,t)\end{pmatrix}$$

Or

$$\sup_{\xi\in\mathbb{D}_1}\|\!|dA_\xi|\!\| \leqslant 1 + \mathrm{e}^{-4\pi}$$

Donc d'après le lemme de Grönwall, pour tout $t \in [0, 5\pi/4]$:

$$\left\|\begin{pmatrix}\frac{\partial\Gamma}{\partial s}(s,t) \\ \frac{\partial^2\Gamma}{\partial s\partial t}(s,t)\end{pmatrix}\right\| \leqslant \mathrm{e}^{(1+\mathrm{e}^{-4\pi})\ \cdot\ 5\pi/4}$$

Nommons ce résultat *relation (iii)*. Reprenons l'équation de $\frac{\partial\Gamma}{\partial s}$:

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial^2\Gamma}{\partial t\partial s}(s,t) \\ \frac{\partial^3\Gamma}{\partial s\partial t^2}(s,t)\end{pmatrix} = (dA)_{Y^{(s)}(t)}\begin{pmatrix}\frac{\partial\Gamma}{\partial s}(s,t) \\ \frac{\partial^2\Gamma}{\partial s\partial t}(s,t)\end{pmatrix}$$

$\frac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial s}$ est solution d'une équation similaire :

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial^2\tilde{\Gamma}}{\partial t\partial s}(s,t) \\ \frac{\partial^3\tilde{\Gamma}}{\partial s\partial t^2}(s,t)\end{pmatrix} = (d\tilde{A})_{\tilde{Y}^{(s)}(t)}\begin{pmatrix}\frac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial s}(s,t) \\ \frac{\partial^2\tilde{\Gamma}}{\partial s\partial t}(s,t)\end{pmatrix}$$

Observons l'équation différence des deux précédentes :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{\partial^2\Gamma}{\partial t\partial s}(s,t) - \frac{\partial^2\tilde{\Gamma}}{\partial t\partial s}(s,t) \\ \frac{\partial^3\Gamma}{\partial t^2\partial s}(s,t) - \frac{\partial^3\tilde{\Gamma}}{\partial t^2\partial s}(s,t) \end{pmatrix} &= (dA)_{Y^{(s)}(t)} \begin{pmatrix} \frac{\partial\Gamma}{\partial s}(s,t) \\ \frac{\partial^2\Gamma}{\partial t\partial s}(s,t) \end{pmatrix} - (d\tilde{A})_{\tilde{Y}^{(s)}(t)} \begin{pmatrix} \frac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial s}(s,t) \\ \frac{\partial^2\tilde{\Gamma}}{\partial t\partial s}(s,t) \end{pmatrix} \\
&= (dA - d\tilde{A})_{Y^{(s)}(t)} \begin{pmatrix} \frac{\partial\Gamma}{\partial s}(s,t) \\ \frac{\partial^2\Gamma}{\partial t\partial s}(s,t) \end{pmatrix} \\
&\quad + (d\tilde{A})_{Y^{(s)}(t)} \begin{pmatrix} \frac{\partial\Gamma}{\partial s}(s,t) \\ \frac{\partial^2\Gamma}{\partial t\partial s}(s,t) \end{pmatrix} - (d\tilde{A})_{\tilde{Y}^{(s)}(t)} \begin{pmatrix} \frac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial s}(s,t) \\ \frac{\partial^2\tilde{\Gamma}}{\partial t\partial s}(s,t) \end{pmatrix} \\
&\quad + (d\tilde{A})_{\tilde{Y}^{(s)}(t)} \begin{pmatrix} \frac{\partial\Gamma}{\partial s}(s,t) - \frac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial s}(s,t) \\ \frac{\partial^2\Gamma}{\partial t\partial s}(s,t) - \frac{\partial^2\tilde{\Gamma}}{\partial t\partial s}(s,t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Or $(d\tilde{A})_{Y^{(s)}(t)} \begin{pmatrix} \frac{\partial\Gamma}{\partial s}(s,t) \\ \frac{\partial^2\Gamma}{\partial t\partial s}(s,t) \end{pmatrix} = (d\tilde{A})_{\tilde{Y}^{(s)}(t)} \begin{pmatrix} \frac{\partial\Gamma}{\partial s}(s,t) \\ \frac{\partial^2\Gamma}{\partial t\partial s}(s,t) \end{pmatrix}$ car $\tilde{A}$ est linéaire. En prenant en compte ceci, l'hypothèse sur $d(grad\ \delta)$, la *relation (iii)* et en majorant la norme de l'expression précédente par l'inégalité triangulaire on obtient :

$$\begin{aligned}
\left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\Gamma}{\partial t\partial s}(s,t) - \frac{\partial^2\tilde{\Gamma}}{\partial t\partial s}(s,t) \\ \frac{\partial^3\Gamma}{\partial t^2\partial s}(s,t) - \frac{\partial^3\tilde{\Gamma}}{\partial t^2\partial s}(s,t) \end{pmatrix} \right\| &\leqslant \mathrm{e}^{-4\pi} \cdot \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial\Gamma}{\partial s}(s,t) \\ \frac{\partial^2\Gamma}{\partial t\partial s}(s,t) \end{pmatrix} \right\| \\
&\quad + 0 \\
&\quad + 1 \cdot \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial\Gamma}{\partial s}(s,t) - \frac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial s}(s,t) \\ \frac{\partial^2\Gamma}{\partial t\partial s}(s,t) - \frac{\partial^2\tilde{\Gamma}}{\partial t\partial s}(s,t) \end{pmatrix} \right\| \\
&\leqslant \mathrm{e}^{-4\pi} \cdot \mathrm{e}^{(1+\mathrm{e}^{-4\pi})5\pi/4} + \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial\Gamma}{\partial s}(s,t) - \frac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial s}(s,t) \\ \frac{\partial^2\Gamma}{\partial t\partial s}(s,t) - \frac{\partial^2\tilde{\Gamma}}{\partial t\partial s}(s,t) \end{pmatrix} \right\| \\
&\leqslant \frac{1}{5}\mathrm{e}^{-5\pi/4} + \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial\Gamma}{\partial s}(s,t) - \frac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial s}(s,t) \\ \frac{\partial^2\Gamma}{\partial t\partial s}(s,t) - \frac{\partial^2\tilde{\Gamma}}{\partial t\partial s}(s,t) \end{pmatrix} \right\|
\end{aligned}$$

Donc d'après le lemme de Grönwall, pour tout $t \in [0,\ 5\pi/4]$:

$$\left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial\Gamma}{\partial s}(s,t) - \frac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial s}(s,t) \\ \frac{\partial^2\Gamma}{\partial t\partial s}(s,t) - \frac{\partial^2\tilde{\Gamma}}{\partial t\partial s}(s,t) \end{pmatrix} \right\| \leqslant \frac{1}{5}\mathrm{e}^{t-\frac{5\pi}{4}} \leqslant \frac{1}{5}$$

Remarquons que ceci implique :

$$\left\| \frac{\partial\Gamma}{\partial s}(s,t) - \frac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial s}(s,t) \right\| \leqslant \frac{1}{5}$$

On a réussi à majorer le deuxième de nos trois termes problématiques. Courage ! Plus qu'un !

$$\left| \left[\frac{\partial\Gamma}{\partial t}(s,\tau(s))\tau'(s) \right] \cdot u_\theta(\Gamma(s,\tau(s))) \right| \leqslant \left\| \frac{\partial\Gamma}{\partial t}(s,\tau(s)) \right\| |\tau'(s)|$$

Rappelons que τ est définie par la propriété suivante :

$$\varphi(s,\tau(s)) = 0$$

où φ est la fonction introduite dans la démonstration de **théorème 3.3**, dont on rappelle la définition :

$$\begin{aligned}
\varphi : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\
(s,t) &\mapsto \mathrm{VR}(Y^{(s)}(t))
\end{aligned}$$

On a donc l'expression de $\tau'(s)$:

$$\tau'(s) = -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,\tau(s))}{\frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,\tau(s))}$$

Or on avait justement montré :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,\tau(s)) \leqslant -\frac{11}{50}$$

Donc

$$|\tau'(s)| \leqslant \frac{50}{11}\ \left|\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,\tau(s))\right| \leqslant 5\left|\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,\tau(s))\right|$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la *relation (iii)* :

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,\tau(s))\right| \leqslant \left\|\frac{\partial^2\Gamma}{\partial s\partial t}(s,\tau(s))\right\| \leqslant \mathrm{e}^{(1+\mathrm{e}^{-4\pi})\ \cdot\ 5\pi/4}$$

On a donc

$$|\tau'(s)| \leqslant 5\ \mathrm{e}^{(1+\mathrm{e}^{-4\pi})\ \cdot\ 5\pi/4}$$

Maintenant, majorons $\left\|\frac{\partial\Gamma}{\partial t}(s,\tau(s))\right\|$. Pour ce, observons que comme $V(\Gamma(s,\tau(s))$ est le maximum de $V(\Gamma(s,t))$ quand τ pour $t \in [3\pi/4, 5\pi/4]$, on a

$$V(s,\tau(s)) \geqslant V(s,\pi)$$

Donc, par conservation de l'énergie mécanique :

$$\left\|\frac{\partial\Gamma}{\partial t}(s,\tau(s))\right\| \leqslant \left\|\frac{\partial\Gamma}{\partial t}(s,\pi)\right\|$$

Donc, d'après la *relation (i)bis* :

$$\left\|\frac{\partial\Gamma}{\partial t}(s,\tau(s))\right\| \leqslant \mathrm{e}^{-11\pi/4}$$

Donc

$$\left\|\frac{\partial\Gamma}{\partial t}(s,\tau(s))\right\| |\tau'(s)| \leqslant 5\ \mathrm{e}^{(1+\mathrm{e}^{-4\pi})\ \cdot\ 5\pi/4}\mathrm{e}^{-11\pi/4} \leqslant \frac{1}{5}$$

On peut enfin reprendre notre calcul de produit scalaire du début de la preuve :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Xi}{\partial s}(s,\tau(s)) \cdot u_\theta(\Gamma(s,\tau(s))) &= u_\theta(\Gamma(s,\tau(s)))\ cos(\tau(s)) \cdot u_\theta(\Gamma(s,\tau(s))) \\
&\quad + \left[\frac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial s}(s,\tau(s)) - u_\theta(\Gamma(s,\tau(s)))\ cos(\tau(s))\right] \cdot u_\theta(\Gamma(s,\tau(s))) \\
&\quad + \left[\frac{\partial\ \Gamma}{\partial s}(s,\tau(s)) - \frac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial s}(s,\tau(s))\right] \cdot u_\theta(\Gamma(s,\tau(s))) \\
&\quad + \left[\frac{\partial\Gamma}{\partial t}(s,\tau(s))\tau'(s)\right] \cdot u_\theta(\Gamma(s,\tau(s))) \\
&\leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \\
&< 0
\end{aligned}$$

Donc $u_\theta(\Gamma(s_0,\tau(s_0)))$ et $\frac{\partial\Xi}{\partial s}(s_0,0)$ ne sont pas orthogonaux.
Donc $u_r(\Gamma(s_0,\tau(s_0)))$ et $\frac{\partial\Xi}{\partial s}(s_0,0)$ ne sont pas colinéaires. □

On a ainsi démontré le **théorème 3.5**, qui, comme on l'a vu, implique le résultat suivant :

Théorème 3.6. *Soit $\delta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction lisse, nulle au voisinage du cercle unité, et vérifiant, pour tout X dans $\mathbb{R}$,*

$$|||(d^2\delta)_X||| \leqslant e^{-4\pi}$$

Alors il existe une position de départ sur le cercle unité qui, lorsqu'on y lâche une particule à vitesse nulle dans le potentiel $V(X) = \frac{1}{2}X^2 + \delta(X)$, produit une orbite brake.

Généralisations éventuelles

Maintenant qu'on a démontré qu'il existe une orbite brake dans le potentiel harmonique perturbé, on peut se demander si on peut l'améliorer.

En particulier on pourrait avoir envie :
— d'alléger les hypothèses sur δ
— de démontrer le résultat en dimension supérieure.

Commençons par regarder les hypothèses que nous avons posé sur δ.
Nous avons supposé $|||(d^2\delta)_X||| \leqslant \mathrm{e}^{-4\pi}$. Or il suffit de jeter un simple coup d'œil aux démontrations des **théorèmes 3.2 et 3.5** pour se convaincre que la plupart des majorations ne sont pas optimales, et qu'on peut améliorer cette borne, probablement de plusieurs ordres de grandeur. Cependant je doute que nous puissions, par cette méthode aller aussi loin que H. Seifert qui ne place aucune borne explicite sur $|||(d^2\delta)_X|||$, mais suppose simplement que le niveau d'énergie 1/2 perturbé reste homéomorphe à un cercle, et que le gradient ne s'y annule pas.

Nous avons également supposé la vitesse nulle au voisinage du cercle unité. Cette hypothèse n'est utile que dans la partie "lancement homocline". Je ne pense pas qu'elle soit cruciale, on pourrait définir des potentiels V_ε qui joueraient le même rôle si δ n'était pas nulle au voisinage du cercle, mais on ferait pour cela face à des problèmes de recollement et de régularité qui m'ont semblé difficiles : en effet dans ce cas on aurait plus l'assurance que le niveau d'énergie associé à 1/2 est le cercle unité.

Quant aux dimensions supérieures, il s'avère que la situation se simplifie dans le cas des dimensions impaires. En effet, en dimension impaire, au lieu de s'intéresser à l'évolution d'un lacet, on s'intéresse à l'évolution d'une sphère de dimension paire, et on peut appliquer le théorème de la boule chevelue pour prouver qu'il existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{\partial \Xi}{\partial s}(s_0, 0) \cdot \frac{\partial \Xi}{\partial t}(s_0, 0) = 0$. On n'aurait dès lors pas besoin du théorème de Noether : on conclurait en démontrant un équivalent des **théorèmes 3.2 et 3.5** en dimension quelconque.

Reste le cas de la dimension paire (notons-là n) qui est plus hasardeux : on est obligé d'essayer d'appliquer à nouveau le théorème de Noether. Mais il y a de l'espoir car le lagrangien qui décrit l'évolution de la sphère unité dans le potentiel perturbé présentera n symétries indépendantes, auxquelles le théorème de Noether associera autant d'intégrales premières indépendantes... Je n'ai pas eu le temps de m'y intéresser de plus près mais je pense qu'il est possible de s'en sortir.

Bibliographie

Voici les ouvrages sur lesquels je me suis appuyé pour ce travail :

[1] Seifert, H. Periodische Bewegungen mechanischer Systeme. Math Z 51, 197–216
[2] Fathi, A. Weak KAM theorem in lagrangian dynamics